
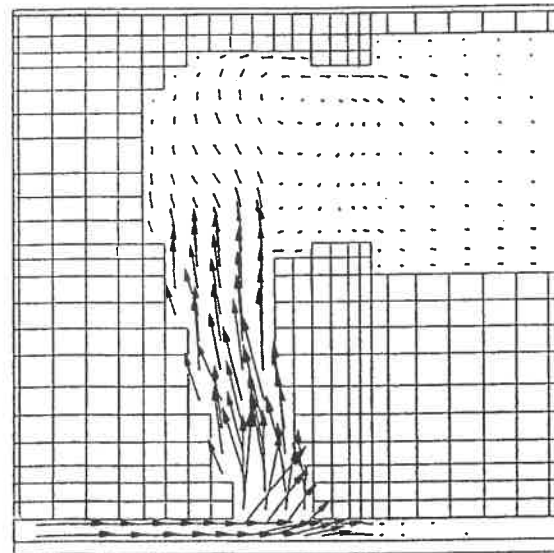


Marcin Perzyk  
Stanisław Waszkiewicz  
Mieczysław Kaczorowski  
Andrzej Jopkiewicz

# ODLEWNICTWO



Wydawnictwo WNT 



**Rysunek 10.4**  
Przykład wyników symulacji numerycznej wypełniania formy, przedstawiający pole prędkości przepływu (otrzymany przy użyciu programu Simulator)

W ca  
mod

### 10.3. Modelowanie krzepnięcia odlewu

#### 10.3.1. Rodzaje zagadnień i równania modelowe

Przy krzepnięciu odlewu występują zjawiska typu makroskopowego oraz mikroskopowego. Numeryczne modelowanie zjawisk makroskopowych obejmuje wymianę ciepła w układzie odlew-forma, umożliwiającą znalezienie pola temperatury w odlewie, narastanie fazy stałej i związanej z nim rozkład czasów krzepnięcia w odlewie, a także procesy makrosegregacji (zróznicowanie składu chemicznego) wynikające z ograniczonej dyfuzji składników stopowych podczas krzepnięcia. W bardzo uproszczony sposób modeluje się także zmiany objętości przy stygnięciu i krzepnięciu (skurcz), przepływ metalu zasilającego i wynikający z niego rozkład porowatości w odlewie oraz własności mechaniczne stopu związane z szybkością krzepnięcia.

Modelowanie zjawisk w skali mikroskopowej obejmuje przede wszystkim zarodkowanie i wzrost kryształów oraz związane z tym procesem wydzielanie się ciepła, zmiany objętościowe stopu, mikrosegregację, a także wynikające z mikrostruktury własności mechaniczne materiału.

##### 10.3.1.1. Modelowanie zjawisk makroskopowych

###### Modelowanie krzepnięcia i stygnięcia

Podstawowym równaniem opisującym przepływ ciepła w ciałach na drodze przewodzenia jest równanie *Fouriera-Kirchhoffa*, oparte na zasadzie zachowania

energii oraz prawie przewodzenia Fouriera. W postaci ogólnej można je zapisać następująco

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left[ \frac{\lambda(T)}{\rho c(T)} \nabla T \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho c(T)} \quad (10.10)$$

gdzie:  $T$  — temperatura (zależna od czasu i od położenia określonego współrzędnymi  $x, y$  i  $z$ );  $t$  — czas;  $\lambda, c$  i  $\rho$  — własności fizyczne ciała, odpowiednio: przewodność cieplna właściwa, ciepło właściwe (przy stałym ciśnieniu) oraz gęstość;  $\dot{Q}$  — wydajność wewnętrznego źródła ciepła, w tym przypadku związanej z wydzielaniem się ciepła krzepnięcia, liczona w jednostkach energii na jednostkę objętości.

Jeżeli dla uproszczenia założy się niezależność stałych materiałowych od temperatury, to równanie powyższe można zapisać w postaci rozwiniętej

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho c} \quad (10.11)$$

Wydajność źródła ciepła związanej z krzepnięciem oblicza się ze wzoru

$$\dot{Q} = L \rho \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (10.12)$$

gdzie:  $L$  — ciepło krzepnięcia stopu,  $f_s$  — udział fazy stałej w krzepącym stopie (zależny od czasu i od położenia określonego współrzędnymi  $x, y$  i  $z$ ). Równanie Fouriera-Kirchhoffa można rozwiązywać, stosując kilka metod numerycznych, np. metodę entalpową, metodę zastępczego ciepła właściwego i inne. **Metoda entalpowa** polega na wstawieniu równania (10.12) do (10.11) i przekształceniu go do postaci

$$\lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho \left( c - L \frac{\partial f_s}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10.13)$$

Równanie (10.13) można także zapisać w postaci

$$\lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (10.14)$$

gdzie  $H$  oznacza *entalpię ciała*, której wielkość wynika ze zgromadzonej w nim energii składającej się z energii podgrzania ciała (związanej z ciepłem właściwym) oraz jego przejścia w stan ciekły (związanej z ciepłem krzepnięcia)

$$H = \int c dT + L(1 - f_s) \quad (10.15)$$

W metodzie entalpowej rozwiązuje się zatem równanie (10.14).

W metodzie różnic skończonych pochodne cząstkowe w równaniu (10.14) zastępuje się ilorazami różnicowymi. W przypadku tzw. jawnej odmiany tej

metody dla każdego kroku czasowego  $\Delta t$  oblicza się przyrost entalpii  $\Delta H$  dla każdej komórki, otrzymując nową wartość entalpii na podstawie wartości ilorazów różnicowych drugiego rzędu, występujących po lewej stronie równania, a otrzymanych w kroku poprzednim. Nowe wartości temperatury oblicza się z zależności między entalpią a temperaturą dla danego materiału, przy czym zależność ta musi być znana.

W metodzie zastępczego ciepła właściwego równanie (10.13) przedstawia się w postaci

$$\lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho c_z \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10.16)$$

gdzie zastępcze ciepło właściwe  $c_z$  wynosi

$$c_z = c - L \frac{\partial f_s}{\partial T} \quad (10.17)$$

Oczywiście dla temperatury powyżej temperatury likwidus i poniżej solidus  $c_z$  jest równe odpowiedniemu ciepłu właściwemu.

Równanie (10.16), które ma postać równania Fouriera-Kirchhoffa (10.11) bez wewnętrznych źródeł ciepła, rozwiązuje się analogicznie jak równanie (10.14) z tym, że w każdym kroku czasowym jest obliczana bezpośrednio nowa wartość temperatury.

Należy zwrócić uwagę, że w obu podanych metodach należy znać związek między udziałem fazy stałej, a temperaturą, niezbędny do wyznaczenia zależności entalpii od temperatury wg wzoru (10.15) lub temperaturowej zależności zastępczego ciepła właściwego wg równania (10.17), w którym występuje pochodna udziału fazy stałej po temperaturze. Trzeba mieć zatem związek typu

$$f_s = f_s(T) \quad (10.18)$$

Zależność między udziałem fazy stałej a temperaturą wyznacza się na ogół z wykresów równowagi dla danego stopu, co jest równoznaczne z przyjęciem założenia, że krzepnięcie stopu ma charakter równowagowy (bez przechłodzenia). Najprostszą i najczęściej stosowaną zależnością jest ta, w której zakłada się, że ciepło krzepnięcia wydziela się liniowo między temperaturą likwidus i solidus, tj.

$$f_s = \frac{T_l - T}{T_l - T_s} \quad (10.19)$$

Inne, bardziej zbliżone do rzeczywistych zależności, zostały wyprowadzone przy założeniu różnych stopni wyrównywania składu chemicznego w fazach stałej i ciekłej podczas krzepnięcia. Wymienić tu należy *regulę dźwigni*, zakładającą całkowite wyrównywanie się składów w obu fazach (patrz p. 1.3.2) oraz *równanie Scheila*, wyprowadzone przy założeniu doskonałej dyfuzji (wyrównywania składu) w fazie ciekłej i całkowitym jej braku w fazie stałej

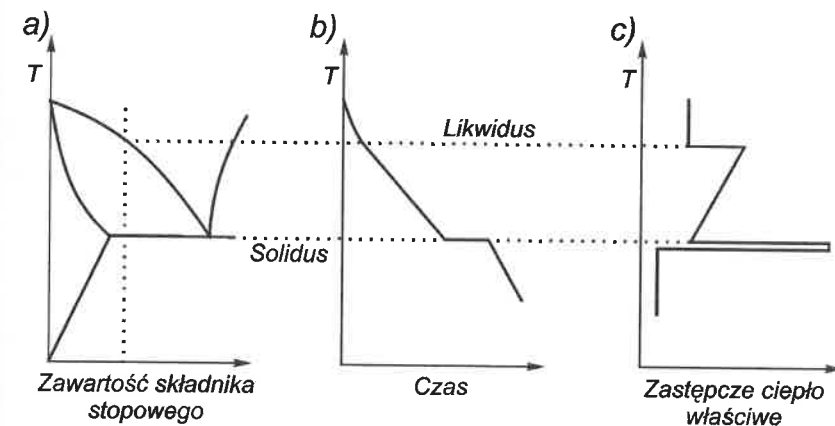
$$f_s = 1 - \left( \frac{T_{m0} - T}{T_{m0} - T_l} \right)^{\frac{1}{k_0 - 1}} \quad (10.20)$$

gdzie:  $T_{m0}$  — temperatura topnienia czystego składnika,  $T_l$  — temperatura likwidus danego stopu,  $k_0$  — współczynnik rozdziału faz, omówiony szczegółowo w p. 1.3.2.2.

Więcej informacji na temat zależności między ilością fazy stałej a temperaturą można znaleźć w podręcznikach [6, 12].

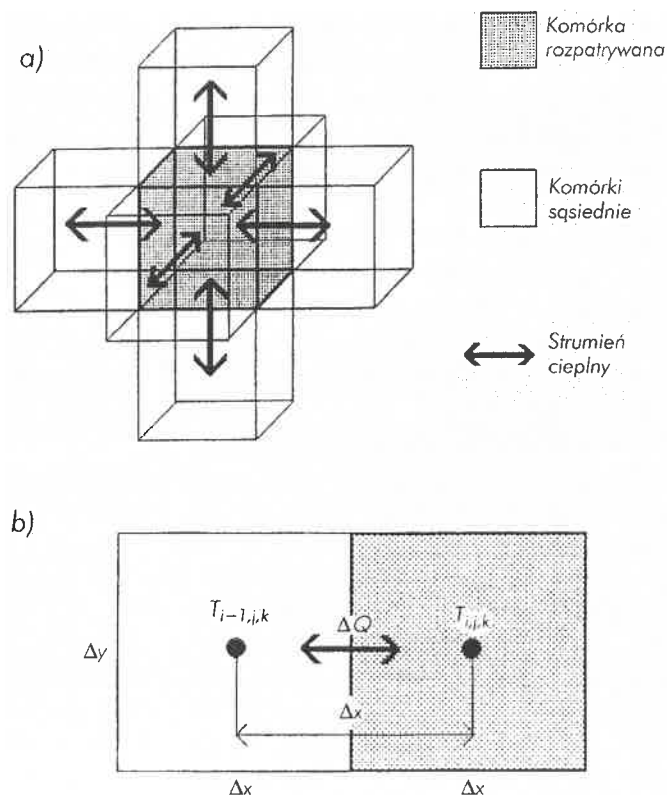
Zależność między zastępczym ciepłem właściwym lub entalpią a temperaturą można wyznaczyć także doświadczalnie, za pomocą urządzenia mierzącego ilość ciepła odbieranego od ciała przy jego stygnięciu lub pobieranego przy ogrzewaniu w sposób ciągły. Urządzenie takie jest nazywane *kalorymetrem skanującym* lub *derywatografem* (patrz także p. 1.3.2.5).

W przypadku stopów krzepnących w stałej temperaturze, tj. metali czystych i stopów eutektycznych, przyjętym sposobem postępowania jest założenie, że w rzeczywistości krzepnięcie odbywa się w bardzo wąskim przedziale temperatury, np.  $T_l - T_s = 1^\circ\text{C}$ , przy czym przyjmuje się dla tego zakresu zależność liniową typu (10.19). Jeżeli stop krzepnie najpierw w zakresie temperatury, a następnie, po dojściu do temperatury eutektycznej w stałej temperaturze, to wówczas zależność fazy stałej od temperatury składa się z dwóch części, wyznaczanych jak wyżej. Na rysunku 10.5 pokazano charakterystyczne wykresy związane z krzepnięciem takiego stopu.



Rysunek 10.5. Wykresy związane z równowagowym krzepnięciem stopu podeutektycznego: a) wykres równowagi z zaznaczeniem składu rozpatrywanego stopu, b) uproszczona krzywa ciepła krzepnięcia i stygnięcia, c) zależność zastępczego ciepła właściwego od temperatury (wykres obrócony o  $90^\circ$ )

Opisane zostanie teraz otrzymywanie równań numerycznych w metodzie bilansów elementarnych (lub ogólniej — objętości kontrolnych). Rozważany obszar, zwykle odlewu i formy, dyskretyzuje się dzieląc na komórki prostokątne o wymiarach  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  i  $\Delta z$ . Rozpatruje się



**Rysunek 10.6.** Schemat wymiany ciepła między sąsiadującymi komórkami zdyskretyzowanego obszaru lub formy: a) komórka rozpatrywana w otoczeniu komórek sąsiadujących, b) wielkości związane z wymianą ciepła między komórką rozpatrywaną a jedną z sąsiednich

bilans energii cieplnej jednej komórki, wymieniającej ciepło z sąsiednimi tak, jak to zaznaczono na rys. 10.6a. W dowolnej chwili odbywa się wymiana ciepła z sześcioma sąsiednimi komórkami na drodze przewodzenia, wskutek różnic temperatury występujących między nimi. Podstawowe wielkości związane z tą wymianą zaznaczono na rys. 10.6b (dla przejrzystości pokazano tylko dwie komórki: rozpatrywaną i sąsiadującą z lewej strony). Prawo przewodzenia ciepła Fouriera dla kierunku  $x$  można zapisać

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (10.21)$$

przy czym gęstość strumienia ciepła  $q_x$  jest zdefiniowana wzorem

$$q_x = \frac{d\dot{Q}_x}{dA} \quad (10.22)$$

gdzie  $A$  — powierzchnia, przez którą przepływa strumień ciepła (prostopadła do kierunku tego strumienia).

Zastępując pochodne w powyższych wzorach ilorazami przyrostów skończonych, otrzymuje się wzór na ilość ciepła jaką rozpatrywana komórka o indeksie  $i, j, k$  dostanie od sąsiedniej, o indeksie  $i-1, j, k$

$$\Delta Q_x = \frac{\lambda}{\Delta x} \Delta y \Delta z (T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}) \Delta t \quad (10.23)$$

Wielkość  $\frac{\Delta x}{\lambda} = R$  jest oporem właściwym przewodzenia ciepła między

środkami dwóch sąsiadujących komórek. Jeżeli z komórką należącą do odlewu sąsiaduje komórka należąca do formy, to wówczas opór cieplny musi uwzględnić różne współczynniki przewodności cieplnej obu materiałów oraz dodatkowy opór cieplny na styku obu ciał wynikający z ich chropowatości, różnego typu zanieczyszczeń na powierzchni oraz ewentualnej szczeliny powstającej w wyniku skurczu odlewu

$$R = \frac{\Delta x/2}{\lambda_o} + \frac{\Delta x/2}{\lambda_f} + R_s \quad (10.24)$$

Analogiczne wyrażenia można napisać dla każdej z sześciu sąsiadujących komórek.

W wyniku wymiany ciepła nastąpi zmiana energii cieplnej rozpatrywanej komórki, powodująca zmianę jej temperatury, zgodnie z zależnością

$$\sum_1^6 \Delta Q = V \rho c \Delta T_{i,j,k} \quad (10.25)$$

gdzie:  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$  — objętość komórki,  $\Delta Q$  — każda z sześciu porcji energii cieplnej wymienianej z komórkami sąsiednimi.

Przyrost temperatury rozpatrywanej komórki wynosi

$$\Delta T_{i,j,k} = T'_{i,j,k} - T_{i,j,k} \quad (10.26)$$

przy czym  $T'$  oznacza nową temperaturę.

Po podstawieniu wzorów typu (10.23) do lewej strony równania (10.25) i uwzględnieniu (10.26), można wyznaczyć temperaturę  $T'$  dowolnej komórki po upływie czasu  $\Delta t$  w funkcji poprzednich temperatur  $T$  komórek sąsiednich oraz komórki danej. Jeżeli podstawimy następnie  $T = T'$  i powtórzy wyliczenia wielokrotnie, sumując w kolejnych krokach przyrosty czasu oraz temperatury dla każdej komórki, otrzyma się w ten sposób temperaturę w odlewie po upływie dowolnego czasu.

Uwzględnienie ciepła krzepnięcia najłatwiej jest osiągnąć przez zastąpienie we wzorze (10.25) ciepła właściwego  $c$  zastępczym ciepłem właściwym  $c_z$ , podobnie jak to robi się w metodzie różnic skończonych. Innym sposobem jest dodanie do lewej strony równania (10.25) dodatkowego członu opisującego bezpośrednio wydzielanie się ciepła krzepnięcia, wynikającego ze wzoru (10.12)

$$\Delta Q_s = VL\rho \frac{\partial f_s}{\partial T} \Delta T_{i,j,k} \quad (10.27)$$

gdzie pochodna udziału fazy stałej po temperaturze  $\partial f_s/\partial T$  jest znaną funkcją temperatury, którą dla krzepnięcia równowagowego można otrzymać ze zróżniczkowania wzoru typu (10.18), np. zależności liniowej (10.19), wzoru Scheila (10.20) lub innego.

Chociaż numeryczne metody rozwiązywania równań krzepnięcia obecnie zdecydowanie dominują w zastosowaniach praktycznych, to jednak warto zwrócić uwagę na niektóre rozwiązania analityczne. Dla jednowymiarowego przypadku krzepnięcia typu warstwowego istnieją dwa klasyczne analityczne rozwiązania równania Fouriera-Kirchhoffa. Przy założeniu idealnego kontaktu między formą a odlewem, tj.  $R_s = 0$ , jest to rozwiązanie *C. Schwarza*, a przy stałej temperaturze na powierzchni odlewu — rozwiązanie *J. Stefana*. Istotne jest, że w obu tych rozwiązaniach otrzymuje się następującą postać zależności grubości warstwy zakrzepłej od czasu

$$x_s = k\sqrt{t} \quad (10.28)$$

gdzie  $k$  — stała zależna od własności termofizycznych odlewu i formy. Z równania tego wynika, że czas krzepnięcia odlewu w kształcie płyty o grubości  $g$  jest proporcjonalny do kwadratu jej grubości

$$t_k \propto \left(\frac{g}{2}\right)^2 \quad (10.29)$$

co jest zgodne z przyjmowaną zależnością czasu krzepnięcia od modułu odlewu (wzór (1.21)), w której często zakłada się, że wykładnik  $a = 2$ , natomiast składnik  $b = 0$ . Należy zwrócić jednak uwagę, że zależność (10.28) otrzymano przy założeniu, że cały opór cieplny między aktualnie krzepnącą warstwą a odbierającą ciepło powierzchnią formy znajdującą się od niej w odległości  $x$ , wynika z oporu przewodzenia ciepła przez zakrzepłą już warstwę o grubości  $x$ . Warstwa ta i związany z nią opór narasta w czasie i stąd bierze się malejące tempo krzepnięcia (pierwiastek we wzorze (10.28)), pomimo stałych warunków wymiany ciepła na powierzchni odlewu.

Jednak, gdy opór na powierzchni styku odlewu i formy jest duży, tj.  $R_s \gg x/\lambda_o$ , wówczas grubość warstwy zakrzepłej będzie proporcjonalna do czasu, gdyż intensywność odbierania ciepła od krzepnącej warstwy do formy (określona przez stałe  $R_s$ ) nie będzie się zmieniała wraz ze wzrostem  $x$ . Tego typu zjawisko obserwuje się np. przy odlewaniu kokilowym stopów aluminium, gdzie opór cieplny na styku formy i odlewu jest duży z uwagi na stosowanie niemetalicznych pokryć ochronnych, natomiast opór cieplny zakrzepłej warstwy odlewu ze stopu o wysokiej przewodności właściwej  $\lambda_o$  — mały. W innych procesach obserwuje się często stany pośrednie, w których wartości wykładnika  $a$  we wzorze (1.20) zawierają się w granicach między 1 a 2.

Modelowanie krzepnięcia odlewów metodami analitycznymi, z uwzględnieniem specyfiki różnych procesów odlewniczych, było przedmiotem badań W. Longi i zostało omówione w podstawowej, obszernej monografii [11].

### Modelowanie przepływu zasilającego

Na ogół głównym celem modelowania krzepnięcia jest ocena procesu zasilania odlewu. Z tego powodu obliczenia cieplne, takie jak opisano powyżej, są często uzupełniane obliczeniami skurczu metalu oraz modelowaniem przepływu zasilającego. W pierwszym etapie stygnięcia metalu wlanego do formy mamy do czynienia ze skurczem w stanie ciekłym, wynikającym z odbierania ciepła przegrzania, czyli z obniżania się temperatury stopu od temperatury zalewania do temperatury likwidus. Skurcz ten można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie współczynnika rozszerzalności cieplnej stopu. Następnie, znając udział fazy stałej w danym punkcie odlewu w całym procesie krzepnięcia oraz objętości właściwe (odwrotności gęstości) stopu w stanie ciekłym i stałym, można obliczyć objętość właściwą mieszaniny, a odnosząc ją do objętości cieczy — procentową wartość skurczu w dowolnej chwili krzepnięcia.

Modelowanie przepływu zasilającego, tj. uzupełniającego braki objętości powodowane skurczem, jest jednak bardzo trudne z uwagi na złożoność procesu przepływu ciekłego metalu (lub mieszaniny cieczy i drobnych kryształów) przez kanały pozostawione przez wykrystalizowany już stop, utworzone np. przez rusztowanie dendrytów. Trudne do określenia są nie tylko opory takiego przepływu, lecz także wartości ciśnień wywołujących ten przepływ, wynikające z wielu oddziaływań między formą a krzepnącym odlewem oraz samego skurczu metalu. Z tego względu przy modelowaniu przepływów zasilających wprowadza się bardzo znaczne uproszczenia. Przyjmuje się, że pole ciśnień w odlewie wynika tylko z ciśnienia grawitacyjnego, opory przepływu zaś definiuje się następująco: jeżeli udział fazy stałej nie przekracza pewnej wartości krytycznej, to opory te są równe zeru (metal sływa swobodnie między kryształami zgodnie z działaniem różnicy ciśnienia metalostatycznego), natomiast po przekroczeniu tej wartości ustaje.

Dla stopów krzepnących warstwowo (np. staliwa), w których długo utrzymuje się stosunkowo wyraźny ciekły kanał w osi ścianki odlewu, wartość krytycznego udziału fazy stałej jest wysoka i wynosi 70÷90%. Dla stopów krzepnących objętościowo, w których siatka kryształów wytwarza się szybko na całym przekroju ścianki odlewu (np. w większości stopów aluminium), przyjmuje się udział fazy stałej dużo mniejszy — ok. 30%. Końcowa objętość metalu w danej komórce jest wyliczana na podstawie skurczu w stanie ciekłym i podczas krzepnięcia w tej komórce, pomniejszonego o tę ilość metalu, która do niej dopłynęła z komórek położonych powyżej do chwili, gdy udział fazy stałej na drodze przepływu nie przekroczył wartości krytycznej.

## Modelowanie innych wielkości

W celu rozwiązywania niektórych specjalistycznych zagadnień istotne jest także modelowanie innych procesów i zjawisk niż już omówione. Najważniejsze z nich wymieniono poniżej, z podaniem odpowiedniej literatury uzupełniającej.

1. Proces konwekcyjnego przepływu metalu, następujący po wypełnieniu formy, w trakcie stygnięcia i krzepnięcia odlewu; występuje zwłaszcza w przypadku odlewów wysokich [1].
2. Procesy makrosegregacji zachodzące podczas krzepnięcia stopów i prowadzące do znaczącego zróżnicowania składu chemicznego w odlewie (patrz p. 1.3.2.4). Ich modelowanie opiera się na równaniach transportu masy (dyfuzji) [2, 13, 23].
3. Procesy krzepnięcia jednokierunkowego i odlewania ciągłego [1, 13, 23].

## 10.3.1.2. Modelowanie zjawisk w skali mikroskopowej

Podstawy zjawisk krzepnięcia odlewu w skali mikroskopowej, a więc krystalizacji stopów odlewniczych, omówiono w p. 1.3.2. Najistotniejsze elementy tej wiedzy z punktu widzenia modelowania matematycznego można ująć następująco.

Siłą napędową krystalizacji ziaren równoosiowych jest przechłodzenie stopu poniżej temperatury likwidus,  $\Delta T = T - T_l$ , niezbędne aby stop mógł krzepnąć. Jest to podejście zasadniczo różne od stosowanego w modelowaniu krzepnięcia w skali makroskopowej, w którym zakłada się z reguły krzepnięcie równowagowe, a więc rozpoczynające się dokładnie w temperaturze likwidus i przebiegające zgodnie z wykresem równowagi danego stopu.

Rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje kryształów: *kolumnowe*, tworzące się w warunkach znacznego gradientu temperatury (np. przy powierzchni styku z formą) i odpowiadające krystalizacji kierunkowej, oraz *równoosiowe*, powstające w warunkach stosunkowo równomiernego odprowadzania ciepła we wszystkich kierunkach w danym punkcie odlewu, odpowiadające krystalizacji objętościowej. W przypadku typowych procesów odlewniczych ten drugi typ kryształów zwykle dominuje w masie odlewu i jego też dotyczyć będą podane dalej równania modelowe. Stosowane obecnie modelowanie powstawania kryształów kolumnowych oraz sformułowanie warunków przejścia od jednego typu kryształów do drugiego można znaleźć w literaturze [28, 29].

Wystąpienie lokalnego przechłodzenia stopu powoduje powstanie zarodków krystalizacji, wokół których narastają równoosiowe ziarna, wyobrażane jako twory kuliste. Zależnie od rodzaju stopu struktura tych ziaren może składać się albo z promieniście wzrastających dendrytów (obwiednia ich wierzchołków tworzy powierzchnię kuli), albo mieszaniny eutektycznej. W tym drugim przypadku zakłada się, że wewnątrz kulistego kryształu znajduje się tylko faza stała, natomiast w przypadku pierwszym przyjmuje się między ramionami dendrytów pewien współczynnik wypełnienia kuli fazą stałą, zwięk-

szający się wraz z postępującą krystalizacją i wynoszący na początku od  $0,2 \div 0,4$  [6]. Liczba zarodków krystalizacji zależy od wielkości przechłodzenia, przy czym przyjmuje się jedno z dwóch założeń [25]:

- a) wszystkie zarodki powstają w jednej chwili, po osiągnięciu temperatury zarodkowania  $T_n < T_l$  — jest to tzw. *zarodkowanie natychmiastowe*;
- b) zarodki powstają w przedziale czasu, który rozpoczyna się w chwili obniżenia się temperatury do wartości niższej niż temperatura likwidus, a kończy w chwili osiągnięcia maksymalnego przechłodzenia, tj. rozpoczęcia się wzrostu temperatury (rekalescencji) — jest to tzw. *zarodkowanie ciągłe*.

Matematyczne modelowanie krystalizacji w tym drugim przypadku jest trudniejsze, gdyż należy uwzględnić zmienną w czasie liczbę zarodków; szczegółowe objaśnienie tego problemu oraz odpowiednie równania można znaleźć w pracach [6, 9, 19]. W podanych poniżej równaniach modelowych zakłada się zarodkowanie natychmiastowe oraz wzrost ziaren typu eutektycznego.

Dla zarodkowania natychmiastowego przyjmuje się, że liczba zarodków zależy od szybkości studzenia, jaka wystąpiła w danym miejscu odlewu w chwili osiągnięcia temperatury  $T_n$ . Zależność tę wyznacza się empirycznie, zliczając liczbę ziaren przypadających na jednostkę objętości odlewu po jego zakrzepnięciu. Typowa zależność ma postać równania kwadratowego

$$N = a + b \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 \quad (10.30)$$

gdzie  $a$  i  $b$  — współczynniki określone doświadczalnie.

Udział frakcji stałej w dowolnej chwili krystalizacji można obliczyć ze wzoru

$$f_s(x, y, z, t) = N(x, y, z) \cdot \frac{4}{3} \pi R^3(x, y, z, t) \quad (10.31)$$

gdzie:  $N$  — gęstość zarodków krystalizacji w danym punkcie odlewu, tj. ich liczba przypadająca na jednostkę objętości,  $R$  — promień ziarna kulistego. Po zróżniczkowaniu tego związku względem czasu otrzymuje się

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = 4\pi NR^2 \frac{\partial R}{\partial t} \quad (10.32)$$

Powyższy wzór na szybkość narastania fazy stałej należy zmodyfikować, uwzględniając zjawisko polegające na tym, że w miarę wzrostu ziaren zaczynają się one stykać ze sobą i efektywna powierzchnia, na której może następować zwiększenie promienia (i objętości) ziarna maleje. Po przyjęciu, że w przybliżeniu ta efektywna powierzchnia jest proporcjonalna do udziału fazy ciekłej w stopie otrzymuje się zależność

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = 4\pi NR^2 \frac{\partial R}{\partial t} (1 - f_s) \quad (10.33)$$

która po scałkowaniu (względem czasu) daje znane równanie *Johnsona Mehla*